

ALGUNOS ASPECTOS ESTRUCTURALES EN LA TEORIA DE MEDIDA Y PROBABILIDAD (*)

SIEGFRIED WEBER

Contenido.

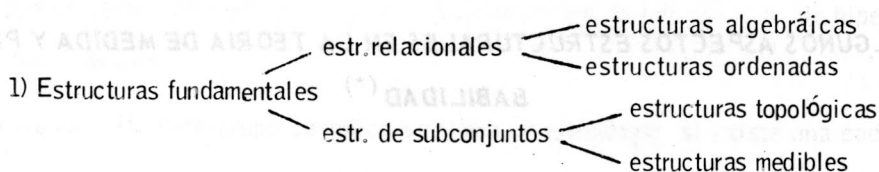
- I) Caracterización de estructuras medibles :
 - a) Estructuras generales.
 - b) Estructuras especiales y relaciones entre estas.
- II) Caracterización de espacios de probabilidad :
 - a) Algebra sobre Ω con probabilidad aditiva y caracterización por un anillo de Boole métrico.
 - b) Extensión de una álgebra sobre Ω con probabilidad σ -aditiva a una σ -álgebra sobre Ω con una probabilidad σ -aditiva o completación en el sentido topológico.
 - c) Relación entre σ -álgebra o σ -aditividad en el sentido de la teoría de conjuntos y en el sentido de la teoría de redes (látices).
- III) Caracterización de modos de convergencia en la teoría de probabilidad :
 - a) Espacios de funciones medibles y topologización.

(*) En este artículo se publican las notas de la conferencia dictada por el autor en el IV Coloquio Colombiano de Matemáticas.

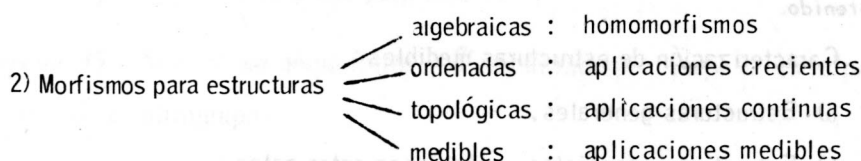
- b) Caracterización de modos de convergencia en el sentido de la probabilidad por convergencia en el sentido de la topología.

I. Caracterización de estructuras medibles.

a) **Estructuras generales.** En un conjunto es posible definir :



Entre conjuntos con estructuras similares es posible definir **morfismos**



3) **Isomorfismos** : = Aplicaciones biyectivas que son morfismos así como sus inversas.

4) **Estructuras múltiples**:= Unas estructuras fundamentales que son compatibles

5) **Estructuras derivables** para subconjuntos, productos y cocientes de conjuntos estructurados.

b) **Estructuras especiales y relaciones entre estas.**

1) (Ω, \mathcal{M}) espacio medible : $\Leftrightarrow \Omega$ conjunto, \mathcal{M} álgebra o σ -álgebra sobre Ω .

(M, \leq) conjunto ordenado con inf y sup para cada dos elementos de M .

(M, \sqcup, \sqcap) latice

$(M, \sqcup, \sqcap, 0, 1, ^-)$ álgebra de Boole (o latice de Boole) := latice distributiva y complementaria con nulidad 0 y unidad 1 .

$(M, +, \cdot, -, 0, 1)$ anillo de Boole := anillo indempotente con unidad 1.

Entre estas estructuras hay relaciones :

2) (M, \leq) conjunto ordenado $\Leftrightarrow (M, \sqcup, \sqcap)$ lattice : 2.1) $a \leq b \Leftrightarrow a \sqcap b = a$
con inf y sup

$$\inf(a, b) := a \sqcap b$$

$$\sup(a, b) := a \sqcup b$$

$$2.2) a \sqcap b := \inf(a, b)$$

$$a \sqcup b := \sup(a, b)$$

3) M álgebra de Boole $\Leftrightarrow M$ anillo de Boole :

$$3.1) a \sqcap b := a \cdot b$$

$$a \sqcup b := a + b + (a \cdot b)$$

$$0 := 0$$

$$1 := 1$$

$$\bar{a} := 1 + a$$

$$3.2) a + b := (a \sqcap \bar{b}) \sqcup (\bar{a} \sqcap b)$$

$$a \cdot b := a \sqcap b$$

$$0 := 0$$

$$1 := 1$$

$$-a := a$$

M es conmutativo (\cdot) y tiene característica 2 ($a + a = 0$)

4) M algebra sobre $\Omega \Rightarrow M$ álgebra de Boole: $\sqcap := \cap, \sqcup := \cup, 0 := \phi, 1 := \Omega, \bar{A} := \Omega \setminus A$

M álgebra sobre $\Omega \Rightarrow M$ anillo de Boole: $\cdot := \cap, + := \Delta, 0 = \phi, 1 = \Omega, -A := A$

5) Teorema de Stone :

M anillo de Boole $\Rightarrow \bigvee_{\Omega} \bigvee_{\varphi: M \rightarrow \mathcal{P}(\Omega)} \varphi$ isomorfismo, $\varphi(M)$ álgebra sobre Ω ,

III. Definición. φ isomorfismo de Stone. $(\Omega, \varphi(M))$ representación de M .

IIII. Caracterización de espacios de probabilidad.

a) Algebra sobre Ω con probabilidad aditiva y caracterización por un anillo de Boole métrico.

Hipótesis para esta parte a): (Ω, \mathbf{A}, P) con \mathbf{A} = álgebra sobre Ω , $P: \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{R}$

positiva, aditiva (si $A \cap B = \phi$), normada ($P(\Omega) = 1$)

1) (\mathbf{A}, d) es un espacio cuasimétrico: $d(A, B) := P(A \Delta B)$.

Definición. $\mathbf{A}|_P :=$ cociente de \mathbf{A} respecto a la relación equivalencia:

$$A \stackrel{P}{\sim} B : \Leftrightarrow P(A \Delta B) = 0, \quad \tilde{A} := \{B \in \mathbf{A} \mid B \stackrel{P}{\sim} A\}.$$

Entonces:

2) $\mathbf{A}|_P$ es un anillo de Boole: $\tilde{A} + \tilde{B} := \widetilde{A \Delta B}$

$$\tilde{A} \cdot \tilde{B} := \widetilde{A \cap B}$$

$$0 := \tilde{\phi}, \quad 1 := \tilde{\Omega}, \quad -\tilde{A} := \tilde{A}$$

$\mathbf{A}|_P$ es un álgebra de Boole: $\tilde{A} \cap \tilde{B} := \widetilde{A \cap B}$

$$\tilde{A} \cup \tilde{B} := \widetilde{A \Delta B \Delta (A \cap B)}$$

$$0 := \tilde{\phi}, \quad 1 := \tilde{\Omega}, \quad \bar{\tilde{A}} := \widetilde{\bar{A}}$$

3) $\tilde{P} : \mathbf{A}|_P \rightarrow \mathbf{R}$ es estrictamente positiva, $\tilde{P}(\tilde{A}) := P(A)$, aditiva (si $\tilde{A} \cdot \tilde{B} = 0$), normada ($\tilde{P}(1) = 1$).

4) $\tilde{d} : \mathbf{A}|_P \times \mathbf{A}|_P \rightarrow \mathbf{R}$ es una métrica invariante por translaciones, aditiva, normada ($\tilde{d}(1, 0) = 1$): $\tilde{d}(\tilde{A}, \tilde{B}) := \tilde{d}(A, B)$.

5) $(\mathbf{A}|_P, \tilde{P})$ de 3) $\Leftrightarrow (\mathbf{A}|_P, \tilde{d})$ de 4): 5.1) $\tilde{P}(\tilde{A}) := \tilde{d}(\tilde{A}, 0)$

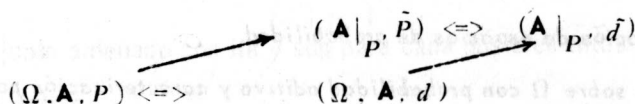
$$5.2) \quad \tilde{d}(\tilde{A}, \tilde{B}) := \tilde{P}(\tilde{A} + \tilde{B})$$

6) $(\mathbf{A}|_P, \tilde{d}) = (\mathbf{A}|_P; +, \cdot, 0, 1; \tilde{d})$ es una estructura múltiple: $+, \cdot$ son aplicaciones continuas respecto a la \tilde{d} -topología.

Definición. $(\mathbf{A}|_P, \tilde{d})$ se llama el anillo de Boole métrico de (Ω, \mathbf{A}, P) .

Diagrama D.1

[1) - 6)]



7) (M, \underline{P}) con $\Leftrightarrow (M, \underline{d})$ con : 7.1) $\underline{P}(M) := d(M, 0)$

M = anillo de Boole

M = anillo de Boole 7.2) $\underline{d}(M, N) := \underline{P}(M+N)$

$\underline{P} : M \rightarrow \mathbb{R}$ estrictamente positiva $\underline{d} : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$ métrica

aditiva

invariante por traslaciones

normada

aditiva ,

normada

8) **Nota** : La representación de 7) es similar a la representación siguiente :

$(V, ||\cdot||)$ $\Leftrightarrow (V, d)$ con 8.1) $||M|| := d(M, 0)$

espacio normado

V = espacio K -lineal 8.2) $d(M, N) := ||M-N||$

d = métrica homogénea invariante por traslaciones.

Definición. $A|_P, \tilde{P}$ se llama un *álgebra de Boole normada*, o *anillo de Boole normado*.

b) **Extensión de un álgebra sobre Ω con una probabilidad σ -aditiva** una σ -álgebra sobre Ω con una probabilidad σ -aditiva; **completación en el sentido topológico**.

Hipótesis para esta parte b) : (Ω, A, P) con A = álgebra sobre Ω , $P: A \rightarrow \mathbb{R}$ positiva, σ -aditiva, normada.

Nota : Las definiciones y resultados de la parte II a) son válidas en esta parte.

Definición. $B(A) :=$ la σ -álgebra generada por A

$L(A) := \{B \Delta M \mid B \in B(A), M \subseteq N, P(N) = 0\}$ la σ -álgebra-completación de $B(A)$.

$P^* :=$ la extensión de P a $B(A)$ [resp. $L(A)$] con las propiedades de P .

Se llama :

$(\Omega, B(A), P^*)$: la *extensión de Borel* de (Ω, A, P) .

$(\Omega, \mathbf{L}(\mathbf{A}), P^*)$: la extensión de Lebesgue de (Ω, \mathbf{A}, P) [resp. $(\Omega, \mathbf{B}(\mathbf{A}), P^*)$]

1) Además del diagrama D.1 para (Ω, \mathbf{A}, P) hay diagramas similares para $(\Omega, \mathbf{B}(\mathbf{A}), P^*)$ y $(\Omega, \mathbf{L}(\mathbf{A}), P^*)$:

2) $i: \mathbf{L}(\mathbf{A})|_{P^*} \rightarrow \mathbf{B}(\mathbf{A})|_{P^*}$ es un isomorfismo; pues $\widetilde{B \Delta M} = \widetilde{B}$.

$$\widetilde{B \Delta M} \rightarrow \widetilde{B}$$

3) $(\mathbf{B}(\mathbf{A})|_{P^*}, \tilde{d}^*)$ es un espacio métrico completo con respecto a \tilde{d}^*

Definición. $(\widehat{\mathbf{A}}|_P, \hat{d})$ sea la completación métrica de $(\mathbf{A}|_P, \tilde{d})$ con respecto a \tilde{d} :

$(\widehat{\mathbf{A}}|_P :=$ conjunto de las clases de equivalencia $\{\hat{A}_n\}$ de sucesiones de Cauchy $\{\tilde{A}_n\}$ en $(\mathbf{A}|_P, \tilde{d})$ con respecto a la relación de equivalencia $\{\hat{B}_n\} = \{\hat{A}_n\} : \Leftrightarrow \lim_n \tilde{d}(\tilde{A}_n, \tilde{B}_n) = 0$
 $\hat{d}(\{\hat{A}_n\}, \{\hat{B}_n\}) := \lim_n \tilde{d}(\tilde{A}_n, \tilde{B}_n).$

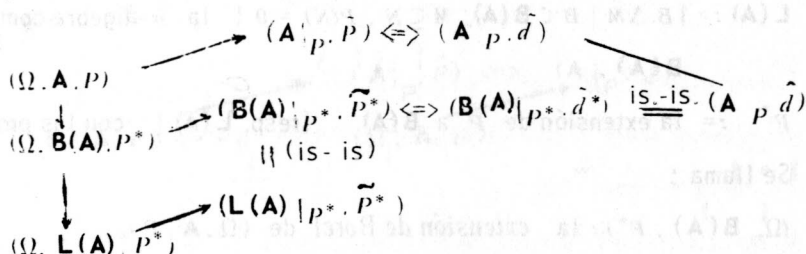
4) $c: \widehat{\mathbf{A}}|_P \rightarrow \mathbf{B}(\mathbf{A})|_{P^*}$ es un isomorfismo-isométrico; (is-is) \hat{A} es definida por $\mathbf{B}(\mathbf{A})|_{P^*}$ es completa y

$$\lim_n \tilde{d}(\tilde{A}_n, \hat{A}) = 0$$

5) \mathbf{A} σ -álgebra $\Rightarrow (\mathbf{B}(\mathbf{A}), P^*) = (\mathbf{A}, P)$

$(\widehat{\mathbf{A}}|_P, \hat{d}) = (\mathbf{A}|_P, \tilde{d})$ espacio métrico-completo

Diagrama D.2.



c. Relaciones entre σ -álgebra o σ -aditividad en el sentido de la teoría de conjuntos y en el sentido de la teoría de latices.

Hipótesis para esta parte c) : (M, \underline{P}) con $M = \text{álgebra de Boole}$, $\underline{P} : M \rightarrow \mathbb{R}$ positiva, aditiva, normada.

Nota : Notaciones e hipótesis de la parte II b) serán válidas en esta parte.

Definición. $(M) \bigvee_{u \in N} M_u \in M$ sea el supremo de $\{M_u\} \subseteq M : \Leftrightarrow (a) \bigwedge_K M_K \leq \bigvee_{u \in N} M_u$

(b) $M \in M \wedge \bigwedge_u M_u \leq M \Rightarrow \bigvee_u M_u \leq M$.

$(M) \bigwedge_{u \in N} M_u \in M$ sea el infinito de $\{M_u\} \subseteq M : \Leftrightarrow (a) \bigwedge_K \bigwedge_u M_u \leq M_K$

(b) $M \in M \wedge \bigwedge_u M \leq M_u \Rightarrow M \leq \bigwedge_u M_u$.

Definición. M σ -álgebra de Boole : $\Leftrightarrow \{M_u\} \subseteq M \Rightarrow (M) \bigvee_{u \in N} M_u, (M) \bigwedge_{u \in N} M_u \in M$

(1) $B(A)$ es una σ -álgebra de Boole resp. a $(B(A)) \bigvee_{u \in N} A_u = \bigcup_{u \in N} A_u$,

$$(B(A)) \bigwedge_{u \in N} A_u = \bigcap_{u \in N} A_u.$$

(2) $B(A)|_{P^*}$ es una σ -álgebra de Boole resp. a $(B(A)|_{P^*}) \bigvee_u \tilde{A}_u = \widetilde{\bigcup_u A_u}$,

$$(B(A)|_{P^*}) \bigwedge_u \tilde{A}_u = \widetilde{\bigcap_u A_u}.$$

Definición. \underline{P} σ -aditiva en M (con relación a la σ -álgebra de Boole $B(M)$ generada por M)

$$: \Leftrightarrow \{M_u\} \subseteq M \wedge \bigwedge_{j \neq K} M_j \cap M_K = 0 \wedge (B(M)) \bigvee_{u \in N} M_u \in M \Rightarrow \underline{P}(\bigvee_u M_u) = \sum_u \underline{P}(M_u)$$

(3) En (A, P) ó $(B(A), P^*)$ la σ -aditividad de P ó P^* en el sentido de latices es equivalente a ésta en el sentido de conjuntos.

(4) P^* σ -aditiva en $B(A) \Leftrightarrow \tilde{P}^*$ σ -aditiva en $B(A)|_{P^*}$.

Nota : Como una extensión de I, b,5) es válido aún el Teorema de Stone.

(5) Sean $\varphi : M \rightarrow \varphi(M)$ el isomorfismo y $(\Omega, \varphi(M))$ la representación de M de Stone; $\mu := \underline{P} \circ \varphi^{-1} : \varphi(M) \rightarrow \mathbb{R}$ la compuesta de φ^{-1} con \underline{P} . Entonces

μ es positiva, σ -aditiva (!), normada en el álgebra $\varphi(\mathbf{M})$ sobre Ω .

Nota: Como una generalización de II b(4) es válida aún:

(6) Sean \underline{P} estrictamente positiva, $(\mathbf{M}, \underline{P})$ y $(\mathbf{M}, \underline{d})$ de II, a) (7);

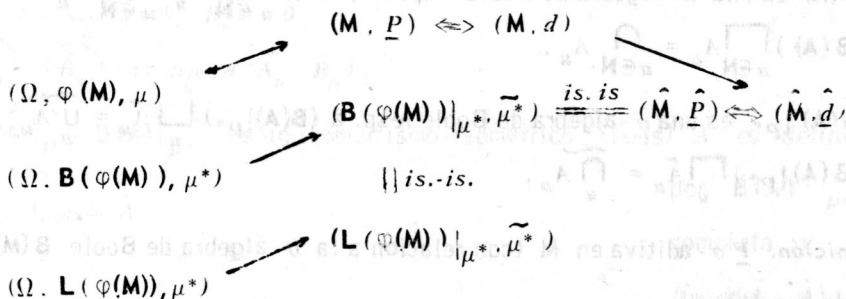
$(\hat{\mathbf{M}}, \hat{d})$ la completación métrica similar a II, b), $\hat{P}(\cdot) := \hat{d}(\cdot, o)$;

$(\Omega, \varphi(\mathbf{M}), \mu)$ la representación de $(\mathbf{M}, \underline{P})$ de (5);

$(\Omega, \mathbf{B}(\varphi(\mathbf{M})), \mu^*)$ ó $(\Omega, \mathbf{L}(\varphi(\mathbf{M})), \mu^*)$ las extensiones de Borel o Lebesgue;

$(\mathbf{B}(\varphi(\mathbf{M}))|_{\mu^*}, \tilde{\mu}^*)$ ó $(\mathbf{L}(\varphi(\mathbf{M}))|_{\mu^*}, \tilde{\mu}^*)$ los cocientes de estas. Entonces $\hat{\mathbf{M}}$ es una σ -álgebra de Boole, \hat{P} es positiva, σ -aditiva (!), normada; $(\mathbf{B}(\varphi(\mathbf{M}))|_{\mu^*})$ y $(\mathbf{L}(\varphi(\mathbf{M}))|_{\mu^*})$ son isométrico-isomórfico a $\hat{\mathbf{M}}$.

Diagrama D.3.



Nota: \underline{P} puede ser solamente aditiva !

III. Caracterización de modos de convergencia en la teoría de probabilidad.

a) Espacios de funciones medibles y topologización.

Hipótesis para las partes a) b) de III: (Ω, \mathbf{B}, P) espacio con probabilidad fija, es decir, $\mathbf{B} = \sigma$ -álgebra sobre Ω . $P: \mathbf{B} \rightarrow \mathbf{R}$ positiva, σ -aditiva, normada. $E(f) := \int_{\Omega} f dP$ la esperanza de la variable aleatoria $f: \Omega \rightarrow \mathbf{R}$.

Definición. $\mathbf{R}^{\Omega} := \{f \mid f: \Omega \rightarrow \mathbf{R}\}$

$Z := \{ f \mid f: \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ variable aleatoria} \}.$

$L_q := \{ f \mid f: \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ variable aleatoria, } E(|f|^q) \in \mathbb{R} \} \text{ para un}$
 $q \in \mathbb{R}, 1 \leq q < \infty.$

$L_\infty := \{ f \mid f: \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ variable aleatoria, } f \text{ acotada p. c. s.} \}.$

Definición. $Z|_E :=$ cociente de Z respecto a la relación de equivalencia:

$$f \stackrel{E}{\sim} g : \Leftrightarrow f \stackrel{P.c.s.}{=} g : \Leftrightarrow P(w \in \Omega \mid f(w) \neq g(w)) = 0 \Leftrightarrow E(f) = E(g).$$

$$L_q|_E \text{ y } L_\infty|_E \text{ similares. } \tilde{f} := \{ g \mid g \stackrel{E}{\sim} f \}.$$

Nota: $x_A \stackrel{E}{=} x_B \Leftrightarrow A \stackrel{P}{=} B.$

- (1) $\mathbb{R}^\Omega, Z, L_q, L_\infty$ son espacios \mathbb{R} -lineales respecto a la adición (+) para funciones y la multiplicación (.) entre funciones y escalares con $L_\infty \subseteq L_q \subseteq L_r \subseteq \mathbb{R}^\Omega$ para cada $q \geq r$. Similamente para los cocientes respecto a $\tilde{f} + \tilde{g} := \widetilde{f+g}, \alpha \cdot \tilde{f} := \widetilde{\alpha \cdot f}, \tilde{E}(\tilde{f}) := E(f).$

- (2) L_∞ es un espacio cuasinormado con respecto a la cuasinorma

$$\| [f] \|_\infty := \inf_{\substack{N \in \mathcal{B} \\ P(N) = 0}} \sup_{x \in \bar{N}} |f(x)|$$

$L_\infty|_E$ es un espacio normado completo con respecto a la norma $\| \tilde{f} \|_\infty := \| [f] \|_\infty.$

- (3) L_q es un espacio cuasinormado con respecto a la cuasinorma $\| [f] \|_q := (E(|f|^q))^{1/q}.$

$L_q|_E$ es un espacio normado completo con respecto a la norma $\| \tilde{f} \|_q := \| [f] \|_q$

- (4) Z es un espacio cuasimétrico con respecto a la cuasimétrica

$$\rho(f, g) := E \left(\frac{|f - g|}{1 + |f - g|} \right).$$

$Z|_E$ es un espacio métrico completo con respecto a la métrica $\tilde{\rho}(\tilde{f}, \tilde{g}) := \rho(f, g)$

- (5) $Z|_E$ es un espacio \mathbb{R} -lineal métrico, es decir:

- (a) $\mathbf{Z}|_E$ es un espacio \mathbf{R} -lineal según 1)
- (b) $\mathbf{Z}|_E$ es un espacio métrico según 4)
- (c) $+, \cdot$ son continuas respecto a $\hat{\rho}$.
- (6) $\mathbf{Z}|_E$ no es un espacio normable según II a 8); pues $\hat{\rho}$ es invariante por traslaciones; $\hat{\rho}$ no es homogénea.

b) Caracterización de modos de convergencia en el sentido de la probabilidad por convergencia en el sentido de la topología.

- (1) Convergencia en $L_\infty|_E$ es la convergencia esencial-uniforme: $\tilde{f}_u \xrightarrow{\|\cdot\|_\infty} \tilde{f}$
- Convergencia en $L_q|_E$ es la convergencia en el medio q -ésimo: $\tilde{f}_u \xrightarrow{\|\cdot\|_q} \tilde{f}$.

Definición. f_u convergente a f en probabilidad:

$$: \Leftrightarrow \bigwedge_{\epsilon > 0} P(w \mid |f_u(w) - f(w)| > \epsilon) \rightarrow 0 : f_u \xrightarrow{P} f$$

- (2) Convergencia en $\mathbf{Z}|_E$ es la convergencia en probabilidad:

$$\tilde{f}_u \xrightarrow{\hat{\rho}} \tilde{f} \Leftrightarrow f_u \xrightarrow{P} f.$$

Directamente siguen por ejemplo estas formas simples para teoremas conocidos:

- (3) $\tilde{f}_u \xrightarrow{\|\cdot\|_I} \tilde{f} \Rightarrow \tilde{f}_u \xrightarrow{\hat{\rho}} \tilde{f}$
- (4) $\tilde{f}_n \xrightarrow{\hat{\rho}} \tilde{f} \wedge f_n \in L_I \wedge (\bigwedge_n |f_n - f| \leq c)$ es válida P -c.s. \Rightarrow
 $\tilde{f}_n \xrightarrow{\|\cdot\|_I} \tilde{f}$

Bibliografía

- [1] Kappos, Demetrios A.: *Strukturtheorie der wahrscheinlichkeitsfelder und räume*, Springer-Verlag, Berlin - Göttingen-Heidelberg, 1960.

- [2] Meschkowski , Herbert , *Wahrscheinlichkeitsrechnung* , Bibliographisches Institut, Mannheim-Zürich, 1968, Hochschul Taschen Buch, 285 1285 a .
- [3] Neveu Jacques , *Mathematische Grundlagen der Wahrscheinlichkeits Theorie*, R. Oldenbourg Verlag, München-Wien, 1969 . Hay traducción al francés.

Obras básicas :

Estructuras :

- [4] Bourbaki Nicolás, *Eléments de Mathématique, Théorie des ensembles* , Hermann, Paris, 1968.

Medida e integración :

- [5] Bartle G. Robert , *The elements of integration*, John Wiley & Sons, Inc , New York - London - Sydney, 1966 .

Analysis Funcional :

- [6] Taylor E. Angus , *Introduction to functional Analysis* , John Wiley & Sons, Inc., New York - London, 2º, 1961 .

* * *